



القطع الناقص



الصور القياسية والملاحظات وطرائق الحل

((القطع الناقص))

قطع ناقص بؤرتاه على محور السينات

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

الرأسان $V(\pm a, 0)$

البؤرتان $F(\pm c, 0)$

الأقطاب $M(0, \pm b)$

قطع ناقص بؤرتاه على محور انحدادات

$$x^2/b^2 + y^2/a^2 = 1$$

الرأسان $V(0, \pm a)$

البؤرتان $F(0, \pm c)$

الأقطاب $M(\pm b, 0)$

★ أساسيات لا تُنسى

• دائماً أكبر عنصر في القطع الناقص هو a .

• إذا كان a^2 تحت x^2 فالقطع سيني، وإذا كان تحت y^2 فالقطع صادي.

• a و c على نفس المحور، أما b (الأقطاب) فتكون عكس المحور.

طول المحور الكبير = المسافة بين الرأسين $2a$ طول المحور الصغير = المسافة بين القطبين $2b$

المحيط $P = 2\pi\sqrt{((a^2+b^2)/2)}$ المساحة $A = ab\pi$ البعد البؤري = المسافة بين البؤرتين $2c$

الاختلاف المركزي $e = c/a$ $e < 1$ قانون الجوهرة $c^2 = a^2 - b^2$

حالات الأسئلة



الحالة (١) — معادلة القطع معلومة في السؤال

- نرتب المعادلة بحيث يكون الطرف الأيمن يساوي واحداً، أي نقسم على العدد الثابت.
- ثم نقارن المقامات: الأكبر هو a^2 والأصغر هو b^2 .

سؤال حدد البؤرتين والرأسين والقطبين وطول المحورين ومساحة ومحيط القطع الناقص الذي معادلته $9x^2 + 13y^2 = 117$

$$117 \text{ نقسم على } 117 \Rightarrow 9x^2/117 + 13y^2/117 = 1$$

$$x^2/13 + y^2/9 = 1 \text{ قطع سني}$$

$$a^2 = 13 \Rightarrow a = \sqrt{13}, \quad b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 13 - 9 = 4 \Rightarrow c = 2$$

$$\text{البؤرتان } F_1(2, 0), F_2(-2, 0)$$

$$\text{الرأسان } V_1(\sqrt{13}, 0), V_2(-\sqrt{13}, 0)$$

$$\text{القطبان } M_1(0, 3), M_2(0, -3)$$

$$\text{طولا المحورين } 2a = 2\sqrt{13}, \quad 2b = 6$$

$$\text{المساحة } A = ab\pi = 3\sqrt{13}\pi$$

$$\text{المحيط } P = 2\pi\sqrt{(13+9)/2} = 2\pi\sqrt{11}$$

★ إذا كان القطع الناقص بصيغة كسور

$$x^2 + 2y^2 = 1 \Rightarrow x^2/1 + y^2/(1/2) = 1$$

• إذا كان المقام واحداً، فإن الرقم الذي بجانب x^2 أو y^2 ينزل إلى المقام فيصير مقام المقام (أي نأخذ مقلوبه).

$$\text{مثال: } 2y^2 = 1/2 \Rightarrow y^2/(1/2) \Rightarrow b^2 = 1/2$$

الحالة (٢) — الأسئلة المباشرة

- كل رأس معلوم $\Rightarrow$ نستخرج منه العنصر a .
- كل بؤرة معلومة $\Rightarrow$ نستخرج منها العنصر c .
- كل قطب معلوم $\Rightarrow$ نستخرج منه العنصر b (وموقعه عكس المحور).

$$\text{المسافة بين البؤرتين} = \text{عدد} \\ \text{عدد} = 2c \Rightarrow \text{نقسم على } 2$$

$$\text{طول المحور الصغير} = \text{عدد} \\ \text{عدد} = 2b \Rightarrow \text{نقسم على } 2$$

$$\text{طول المحور الكبير} = \text{عدد} \\ \text{عدد} = 2a \Rightarrow \text{نقسم على } 2$$

• حتى نكتب معادلة أي قطع ناقص لازم نستخرج a^2 و b^2 فقط.

قانون الجوهرة هو حارر الشاكل — نستخرجه للوصول إلى أي عنصر ناقص.



★ إذا أعطى المساحة والمحيط

- نأخذ المساحة ونرتبها ونستخرج المعادلة ①.
- نكتب المحيط ونبتله ونستخرج المعادلة ②.
- نعوض ① في ② حتى نستخرج a^2 و b^2 .

سؤال - جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه نقطة الأصل ومساحة منطقتيه 7π ومحيطه 10π

$$A = ab\pi = 7\pi \Rightarrow ab = 7 \quad ①$$

$$2\pi\sqrt{(a^2+b^2)/2} = 10\pi \Rightarrow (a^2+b^2)/2 = 25 \Rightarrow a^2 + b^2 = 50 \quad ②$$

$$a^2b^2 = 49 \quad \text{بتربيع ①}$$

$$a^2 = 49, \quad b^2 = 1 \quad \text{حل المعادلتين}$$

$$x^2/49 + y^2/1 = 1 \quad \text{المعادلة}$$

أسئلة الربط بين بؤرة المافى والقطع الناقص

إحدى قطبي الناقص هي بؤرة المافى

$$P = b$$

إحدى رأسي الناقص هي بؤرة المافى

$$P = a$$

إحدى بؤرتي الناقص هي بؤرة المافى

$$P = c$$

العبارات التالية نحولها إلى رموز في القطع الناقص

$$(1/2)(2a) = \text{عدد}$$

$$(1/2)(2b) = \text{عدد}$$

$$2a + 2b = \text{عدد}$$

$$2a - 2b = \text{عدد}$$

$$(2a)^2 + (2b)^2 = \text{عدد}$$

$$2a = 2(2b)$$

$$2a = 3(2b)$$

$$① \text{ نصف محوره الكبير} = \text{عدد}$$

$$② \text{ نصف محوره الصغير} = \text{عدد}$$

$$③ \text{ مجموع طولَي محوريه} = \text{عدد}$$

$$④ \text{ الفرق بين طولَي محوريه} = \text{عدد}$$

$$⑤ \text{ مجموع مربعي طولَي محوريه} = \text{عدد}$$

$$⑥ \text{ طول محوره الكبير ضعف محوره الصغير}$$

$$⑦ \text{ طول محوره الكبير ثلاثة أمثال محوره الصغير}$$



★ انتبه — أسئلة النسب

النسبة بين طول محوره الكبير وبعده

البؤري $5/3$

$$2a/2c = 5/3$$

النسبة بين طولَي محوريه $4/3$

$$2a/2b = 4/3$$

النسبة بين طولَي محوريه $2/5$

$$2b/2a = 2/5 \text{ صغير / كبير}$$

• الرقم الأكبر يكون مقابل $2a$ دائماً.

• إذا لم يُحدّد نوع القطع ولا محوره نكتب احتماليين: سني وصاري.

ملاحظة (٣) — الأجزاء المقطوعة من المحاور

• إذا ذكر في السؤال أن القطع يقطع من محور السينات جزءاً طوله عدد ومن محور انصادات جزءاً طوله عدد فإن هذه الأجزاء تمثل محاور القطع الناقص:

الجزء الآخر $\Rightarrow 2b$

الجزء الأكبر $\Rightarrow 2a$

• ونكتب المعادلة حسب موقع الجزء الأكبر.

• إذا أعطى جزءاً مقطوعاً واحداً فقط فعندنا احتمالان: مرة نعتبره $2a$ ومرة $2b$.

سؤال ٤ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ويقطع من محور السينات جزءاً طوله 8 وحدات ومساحة منطقتيه 24π وحدة مساحة.

سؤال ٥ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ويقطع من محور السينات جزءاً طوله 10 وحدات وبؤرتاه $F_1(-2, 0)$ و $F_2(2, 0)$.

• إذا كان يقطع من محور السينات وبؤرتاه على السينات فهذا مباشرة هو a ، أما إذا كان على العكس فهو b .

ملاحظة (٤) — بُعد البؤرة عن الرأسين

• إذا ذكر أن إحدى بؤرتيه تبعد عن الرأسين بالعددين m و n على الترتيب فنستخرج منها:

الفارق بين العددين $\Rightarrow 2c$

مجموع العددين $\Rightarrow 2a$

• هذا النوع من الأسئلة نأخذ فيه احتماليين.



ملاحظة (٥) — المرور والنقطة محورية

كل قطع ناقص (متمم — متمم — يقطع) بنقطة محورية:

(عدد, 0) $\Rightarrow b$ إذا كانت عكس المحور

(عدد, 0) $\Rightarrow a$ إذا كانت على نفس المحور

• وكذلك الت: عدد $x = \pm$ أو عدد $y = \pm$ — نفس المحور a ، عكس المحور b .

• ومنها: متمم دليل القطع المرفق — نحول الدليل إلى عدد على أحد المحورين.

سؤال ٣٢ معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه هما $(0, \pm 3)$ ويمتد دليل القطع المرفق $y^2 - 24x = 0$.

ملاحظة (٦) — المرور بنقطة عددية

كل قطع ناقص (متمم — متمم — يقطع) بنقطة عددية (عدد, عدد) فإن النقطة تحقق المعادلة، أي نعوض (x, y) في المعادلة القياسية. ونظر أولاً: القطع على أي محور؟ ثم نكتب معادلة ذلك المحور ونعوض النقطة.

سؤال ٤٦ معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المرفق $y^2 + 8x = 0$ معلماً بأن القطع الناقص متمم بالنقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

★ التقاطع مع القطع المرفق

إذا تقاطع القطع المرفق عند نقطة إحداثياتها السيني (أو الصادي) معلوم، فإننا نأخذ ذلك الإحداثي ونعوضه في معادلة المرفق لنستخرج الإحداثي الثاني، فتصبح لدينا نقطة عددية (x, y) .

سؤال ٥٥ معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تنتميان لمحور السينات وطول محوره الكبير ضعف محوره الصغير، ويقطع القطع المرفق $8x = 0$ عند النقطة التي إحداثياتها السيني يساوي (-2) .

★ إذا أعطى القطع الناقص بنقطتين عدديتين

نعيّض النقطة الأولى في المعادلة ونسميها ①.

نعيّض النقطة الثانية في المعادلة ونسميها ②.

• نحلّ المعادلتين بطريقة الحذف.



ملاحظة (٧) — نقطة التقاطع مع أحد المحاور

إنه ذكر في السؤال نقطة تقاطع مع أحد المحاور، وأعطى (معادلة منحنٍ — معادلة مستقيم — معادلة دائرة) فإن:

نقطة التقاطع مع محور الصادات $\Rightarrow$ (عدد, 0) نضع

$$x = 0$$

نقطة التقاطع مع محور السينات $\Rightarrow$ (عدد, 0) نضع $y = 0$

هذه نقطة التقاطع قد تمثل بؤرة أو رأساً أو قطباً حسب ما يذكر في السؤال، ثم ننظر: نفس المحور a ، عكس المحور b .

سؤال ٧ حدد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحنى $x^2 + y^2 - 3x = 16$ مع محور الصادات، ويمس دليلاً القطع المكافئ $y^2 = 12x$.



إيجاد المجاهيل

★ إيجاد مجهول واحد

نرتب المعادلة حتى تصبح بالصورة القياسية، ثم نستخرج a^2 و b^2 ونطبق قانون الجوهرة.

$$kx^2 + 4y^2 = 36 \Rightarrow x^2/(36/k) + y^2/9 = 1 \text{ حيث } a^2 = 36/k$$

$$4x^2 + 2y^2 = k \Rightarrow x^2/(k/4) + y^2/(k/2) = 1 \text{ حيث } b^2 = k/2$$

سؤال ٤٠. لتكن $x^2 + 4y^2 = 36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل واحد بؤريته $(\sqrt{3}, 0)$ جد $k \in R$.

سؤال ٤١. قطع ناقص معادلته $4x^2 + 2y^2 = k$ والبعد بين بؤريته $2\sqrt{3}$ جد قيمة k .

★ إيجاد مجهولين

يعطي معلومتين: فنكتب من الأولى معادلة، ومن الثانية معادلة ثم نحلها معاً.
نرتب المعادلة الأصلية لنستخرج a^2 و b^2 بدلالة المجهولين، ثم نقارن.

$$hx^2 + ky^2 = 36 \Rightarrow x^2/(36/h) + y^2/(36/k) = 1 \text{ حيث } a^2 = 36/h, b^2 = 36/k$$

سؤال ٤٤. قطع ناقص معادلته $x^2 + ky^2 = 36$ مركزه نقطة الأصل ومجموع مربعي طولَي محوريه يساوي 60 واحد بؤريته هي بؤرة القطع الطافي $x = 4\sqrt{3}$ جد $h, k \in R$.

سؤال - قطع ناقص يمر بنقطة تقاطع المستقيم $2x + y = \sqrt{3}$ مع محور الصادات، علماً أن مساحة منطقه $2\sqrt{3}\pi$ ومعادلته $3x^2 + hy^2 = L$ حيث بؤراته تنتميان لمحور السينات، جد $h, L \in R$.

$$x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{3} \Rightarrow (0, \sqrt{3}) \Rightarrow b = \sqrt{3}$$

$$x^2/(L/3) + y^2/(L/h) = 1 \text{ حيث } a^2 = L/3$$

$$A = ab\pi = 2\sqrt{3}\pi \text{ نستخدم المساحة}$$



التعريف — للقطع الناقص

$$QF_1 + QF_2 = 2a$$

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

العدد الثابت في تعريف القطع الناقص هو $2a$.

سؤال — باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(2, 0)$, $F_2(-2, 0)$ والعدد الثابت يساوي 6.

$$PF_1 + PF_2 = 2a = 6$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 6$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 6 - \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 36 - 12\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + (x+2)^2 + y^2 \quad \text{بتربيع الطرفين}$$

$$12\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 36 + 8x \Rightarrow 3\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 9 + 2x \quad \text{4 نقسم على}$$

$$9(x^2 + 4x + 4 + y^2) = 81 + 36x + 4x^2 \quad \text{بتربيع الطرفين}$$

$$5x^2 + 9y^2 = 45 \Rightarrow \boxed{x^2/9 + y^2/5 = 1}$$



★ محيط الثلث

إذا أعطى في السؤال محيط الثلث QF_1F_2 :

• محيط الثلث = مجموع أضلاعه الثلاثة العدد $QF_1 + QF_2 + F_1F_2$

$$2a + 2c = \text{العدد} \Rightarrow$$

سؤال - جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(-4, 0)$ ، $F_2(4, 0)$ والنقطة Q تنتمي للقطع الناقص بحيث أن محيط الثلث QF_1F_2 يساوي 24 وحدة.

$$c = 4 \Rightarrow 2c = 8$$

$$2a + 2c = 24 \Rightarrow 2a = 16 \Rightarrow a = 8$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 64 - 16 = 48$$

$$x^2/64 + y^2/48 = 1$$

سؤال - جسر على شكل نصف قطع ناقص، المسافة بين نهايتي قاعدته 24 m وارتفاعه 8 m جد ارتفاع الجسر عند نقطة تبعد عن بدايته 6 m.

$$2a = 24 \Rightarrow a = 12, a^2 = 144$$

$$b = 9 \Rightarrow b^2 = 81 \text{ الارتفاع}$$

نقطة تبعد 6 م عن البداية $x = -6$

$$36/144 + y^2/81 = 1 \Rightarrow y^2 = 81 \times 3/4$$

$$y = 9\sqrt{3}/2 \approx 7.79 \text{ m}$$

★ ربط المتجه (العدد المركب) بالقطع الناقص

يعطي عدداً مركباً نبتته حتى نستخرج المجهولين، ومنه نأخذ البؤرة والمقياس :
• البؤرة $F(0, d)$ نأخذ منها c .

$$2a = \sqrt{(e^2 + d^2)} \Rightarrow \|x + yi\| = \sqrt{(x^2 + y^2)} \text{ المقياس}$$

سؤال - إذا كان $(2+i)/(1-i) = e + di$ = جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه $(0, d)$ وطول محوره الكبير يساوي $2\|e + di\|$.



★ ربط القطع الناقص بالدائرة

• معادلة الدائرة: $0 = x^2 + y^2 + Ax + By + C$ حيث A معامل x و B معامل y و C الحد الثابت.

• المركز $(h, k) = (-A/2, -B/2)$

• نصف القطر $r = \sqrt{(h^2 + k^2 - C)}$

سؤال ٢ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه هي نقطة مركز الدائرة $2x^2 + 2y^2 + 16x - 18 = 0$ وطول محوره الكبير يساوي طول قطر تلك الدائرة.

انسحاب القطع الناقص

البؤرتان على محور السينات

المركز (h, k)

$$(x-h)^2/a^2 + (y-k)^2/b^2 = 1$$

البؤر $F(h+c, k), (h-c, k)$

الرؤوس $V(h+a, k), (h-a, k)$

الأقطاب $M(h, k+b), (h, k-b)$

المحور الكبير $2a$ معادلته $y = k$

المحور الصغير $2b$ معادلته $x = h$

البؤرتان على محور الصادات

المركز (h, k)

$$(x-h)^2/b^2 + (y-k)^2/a^2 = 1$$

البؤر $F(h, k+c), (h, k-c)$

الرؤوس $V(h, k+a), (h, k-a)$

الأقطاب $M(h+b, k), (h-b, k)$

المحور الكبير $2a$ معادلته $x = h$

المحور الصغير $2b$ معادلته $y = k$

★ إذا أعطى معادلة غير مرتبة فيجب ترتيبها بالوضع القياسي

1. نفتح قوسين بينهما إشارة موجب: $(y \text{ جماعة}) + (x \text{ جماعة}) = \text{العدد}$.

2. نسحب معامل x^2 ومعامل y^2 عاملاً مشتركاً.

3. نضيف $(x \text{ نصف معامل})$ للقوس الأول، و $(y \text{ نصف معامل})$ للقوس الثاني.

4. نحذف كل قوس بالمربع الكامل $(\text{الأول} \mp \sqrt{\text{الثالث}})$.

5. نقسم على العدد الذي في الطرف الأيمن ونقارن مع المعادلة القياسية.

موكل عدد نضيفه للطرف الأيسر لازم نضيفه للطرف الأيمن أيضاً (مضروباً في العامل المشترك).

سؤال ٣ جد البؤرتين والرأسين والقطين وطول ومعادلة كل من المحورين للقطع الناقص الذي معادلته

$$9x^2 + 16y^2 - 72x - 96y + 144 = 0$$



وزارة التعليم

- إذا علمت أن $(3k+1) + y^2 / (2k-6) = 1$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $(0, -3)$ جد قيمة k . (القطع صادي)
- قطع ناقص مركزه نقطة الأصل ورأسه $(5, 0)$ إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المرافق الذي رأسه نقطة الأصل ودليله يمتد بالنقطة $(-3, 4)$ ، جد معادلتَي القطعين. $P = 3 \Rightarrow x = -3$ ، و $P = 6$
- جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات، ويقطع القطع المرافق $2x + y^2 = 0$ عند النقطة التي إحداثيها الصادي يساوي 4، وطول محوره الصغير يساوي نصف طول محوره الكبير. $2b = a \Rightarrow 2b = (1/2)(2a)$
- لكن $x^2 + 4y^2 = 36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $(\sqrt{k}, 0)$ جد $k \in \mathbb{R}^+$. إذا ظهرت قيمتان نأخذ السالبة ونأخذ الموجبة
- جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومجموع مربعي طولَي محوريه 56 وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المرافق الذي بؤرته تنتمي لمحور السينات ودليله يمتد بالنقطة $(-4, 17)$. $P = 4 = c \Rightarrow x = -4$
- جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وينطبق محوره على المحورين الإحداثيين، ويقطع من محور السينات جزءاً طوله 8 وحدات ومن محور الصادات جزءاً طوله 12 وحدة، ثم جد المسافة بين البؤرتين ومساحة منطقتيه.

سينطوي تعب الأيام

كأنه لم يكن