



القطع الزائد

الصور القياسية والقوانين وطرائق الحل

((القطع الزائد))

قطع زائد بؤرتاه على محور السينات

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$

الرأسان $V(\pm a, 0)$

البؤرتان $F(\pm c, 0)$

الأقطاب $M(0, \pm b)$

قطع زائد بؤرتاه على محور الصادات

$$y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$$

الرأسان $V(0, \pm a)$

البؤرتان $F(0, \pm c)$

الأقطاب $M(\pm b, 0)$

أكبر عنصر في القطع الزائد هو c ① طول المحور الحقيقي $2a$ ② طول المحور التخيلي (المرافق) $2b$

③ المسافة بين البؤرتين $2c$ ④ الاختلاف المركزي $e = c/a > 1$ ⑤ قانون الجوهرة $c^2 = a^2 + b^2$

★ أساسيات لا تنسى

• معادلة القطع الزائد إشارتها سالبة بين الحدين.

• a^2 دائماً تكون تحت الجذر الموجب: إذا بدأت المعادلة بـ x^2 فالقطع سيني، وإذا بدأت بـ y^2 فالقطع صادي.

• a و c على نفس المحور، أما b فتكون عكس المحور.

حالات الأسئلة

★ معادلة جاهزة ومرتبّة

نقارنها مباشرة مع المعادلة القياسية ونستخرج a^2 و b^2 ثم نطبق قانون الجوهرة.

سؤال عتبت البؤرتين والرأسين والقطين وطول كل من المحورين الحقيقي والمرافق للقطع الزائد $x^2/64 - y^2/36 = 1$ ثم ارسمه.

$$a^2 = 64 \Rightarrow a = 8, \quad b^2 = 36 \Rightarrow b = 6$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow c = 10$$

البؤرتان $F_1(10, 0)$, $F_2(-10, 0)$

الرأسان $V_1(8, 0)$, $V_2(-8, 0)$

القطين $M_1(0, 6)$, $M_2(0, -6)$

طولا المحورين $2a = 16$, $2b = 12$



★ معادلة غير مرتبة

نرتبها بالقسمة على العدد الثابت حتى تشبه المعادلة القياسية.

سؤال عتین کلاً من البؤرتين والرأسين ثم جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطع الزائد $12x^2 - 4y^2 = 48$.

$$12x^2/48 - 4y^2/48 = 1 \text{ نقسم على } 48$$

$$x^2/4 - y^2/12 = 1 \text{ قطع سيني}$$

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2, b^2 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$$

$$c^2 = 4 + 12 = 16 \Rightarrow c = 4$$

$$F(\pm 4, 0), V(\pm 2, 0), e = c/a = 2 \text{ الاختلاف المركزي}$$

إيجاد معادلة القطع الزائد — الأسئلة المباشرة

سؤال جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره المرافق هو 4 وحوصلات وبؤرتاه هما النقطتان

$$F_1(0, \sqrt{8}), F_2(0, -\sqrt{8})$$

$$2b = 4 \Rightarrow b = 2 \text{ المحور المرافق}$$

$$c = \sqrt{8} \Rightarrow c^2 = 8 \text{ قطع صادي}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 = 8 - 4 = 4$$

$$y^2/4 - x^2/4 = 1$$



رابط القطع المافى بالقطع الزائد

كل قطع زائد (متمركز — متمركز — يقطع)
بنقطة محورية
مباشرة a

إحدى رأسي الزائد هي بؤرة المافى
 $a = p$

إحدى بؤرتي الزائد هي بؤرة المافى
 $c = p$

سؤال 5 قطع زائد طول محوره الحقيقي $2\sqrt{5}$ إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المافى الذي رأسه نقطة الأصل ويمتد بالنقطتين $(1, -2\sqrt{5})$ ، $(2\sqrt{5}, 1)$ ، معادلتها القطع المافى والقطع الزائد الذي مركزهما نقطة الأصل.

المحور الحقيقي $2a = 6 \Rightarrow a = 3$

سيني موجب — نعوض النقطة $y^2 = 4px$

بؤرة المافى هي بؤرة الزائد $c = p$

سؤال 6 معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى رأسيه هي بؤرة القطع المافى $12x = y^2$ والبعد بين بؤرتيه 10 وحدات.

الرأس = بؤرة المافى $4p = 12 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow a = 3$

$2c = 10 \Rightarrow c = 5$

$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$

$x^2/9 - y^2/16 = 1$

سؤال 7 معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المافى $20y = x^2$ ويمتد بالنقطة $(2, 0)$. متمركز — يقطع — $a = 2 \Rightarrow$

★ إن لم يُحدد نوع القطع المخروطي

نعرفه من خلال الاختلاف المركزي :

$e = 1$
قطع مكافئ

$e < 1$
قطع ناقص

$e > 1$
قطع زائد

سؤال 8 معادلة القطع المخروطي الذي مركزه نقطة الأصل وينطبق محوره على المحورين الإحداثيين واختلافه المركزي يساوي 3 ويمتد بالنقطة $(2, 0)$.

نقطة محورية $a = 2$

إذن قطع زائد $e = c/a = 3 \Rightarrow c = 6 > 1$

$b^2 = 36 - 4 = 32 \Rightarrow x^2/4 - y^2/32 = 1$



رابط القطع الزائد بالقطع الناقص

إذا كانت بؤرتا الزائد هما بؤرتا الناقص $\Rightarrow$ للناقص $c = e$ للزائد e .

وتمت دليل القطع المكافئ $\Rightarrow a$ للزائد.

سؤال جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الناقص $x^2/9 + y^2/25 = 1$ وتمت دليل القطع المكافئ $x^2 + 12y = 0$.

للقص — قطع صادي $c = 4 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow a^2 = 25, b^2 = 9$

الدليل $x^2 = -12y \Rightarrow 4p = 12 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow y = 3$

تمت الدليل $a = 3$

$b^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow y^2/9 - x^2/7 = 1$

★ المرور بنقطة عددية

كل قطع زائد (تمت — تمت — يقطع) بنقطة عددية (عدد , عدد) أو بنقطتين، نعوض النقطة في المعادلة القياسية :

$$y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$$

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$

سؤال جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 16x = 0$ إذا علمت أن القطع الزائد يمر بالنقطة $(2\sqrt{2}, 6)$. سيني $p =$ هو نعوض النقطة في معادلة السينات

★ نقطة التقاطع مع مستقيم

التقاطع مع محور السينات $(0, y) \Rightarrow x = 0$

التقاطع مع محور السينات $(x, 0) \Rightarrow y = 0$

سؤال ٢ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل واحدى بؤرتيه هي نقطة تقاطع المستقيم $2x - y = 8$ مع محور السينات وطول محوره التخييلي ٤ وحدات.

$y = 0 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow c = 4$

$2b = 4 \Rightarrow b = 2$

$a^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow x^2/12 - y^2/4 = 1$



★ رأس يبعد عن البؤرتين بعددين

مجموع العددين $\Rightarrow 2c$

الفرق بين العددين $\Rightarrow 2a$

سؤال اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل إذا علمت أن أحد رأسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين 9 ، 1 وحدة على الترتيب وينطبق محوراه على المحورين الإحداثيين.

$$2a = 9 - 1 = 8 \Rightarrow a = 4$$

$$2c = 9 + 1 = 10 \Rightarrow c = 5$$

$$b^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow x^2/16 - y^2/9 = 1$$

نصف القطر البؤري

① نصف القطر المرسوم من جهة اليمين أو الأعلى $\Rightarrow$ البؤرة الموجبة $F(c, 0)$ أو $F(0, c)$:

$$PF_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

② نصف القطر المرسوم من جهة اليسار أو الأسفل $\Rightarrow$ البؤرة السالبة $F(-c, 0)$ أو $F(0, -c)$:

$$PF_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

★ ملاحظة مهمة

إننا ذكر في السؤال قطع زائد وقطع ناقص وكل منهما يمتد ببؤرة الآخر :

للقص $a =$ للزائد c

للقص $c =$ للزائد a



التعريف — للمقطع الزائد

$$PF_1 - PF_2 = \mp 2a$$

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

معد رفع القيمة المطلقة تأخذ موجب وسالب .

سؤال باستخدام التعريف جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه $F_1(2\sqrt{2}, 0)$, $F_2(-2\sqrt{2}, 0)$ والفرق بين بعدي أي نقطة عليه عن البؤرتين يساوي 4 .

$$|PF_1 - PF_2| = 4$$

$$\sqrt{((x-2\sqrt{2})^2 + y^2)} - \sqrt{((x+2\sqrt{2})^2 + y^2)} = \mp 4$$

$$(x-2\sqrt{2})^2 + y^2 = 16 \mp 8\sqrt{((x+2\sqrt{2})^2 + y^2)} + (x+2\sqrt{2})^2 + y^2 \quad \text{بتربيع الطرفين}$$

$$\mp \sqrt{((x+2\sqrt{2})^2 + y^2)} = 2 + \sqrt{2}x \quad \text{بعد التبسيط}$$

$$-x^2 + y^2 = -4 \Rightarrow \boxed{x^2/4 - y^2/4 = 1}$$

بجاء المجاهيل

• نرتب المعادلة بالصورة القياسية لنستخرج a^2 و b^2 لطبدلالة المجهول، ثم نستفيد من المعلومة الثانية.

$$5y^2 - 4x^2 = h \Rightarrow y^2/(h/5) - x^2/(h/4) = 1 \quad \text{حيث } a^2 = h/5, b^2 = h/4$$

سؤال - لتكن $4x^2 - y^2 = h$ معادلة قطع زائد إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع الناقص $0 = 5x^2 - 4y = c$ لا تكافئ

سؤال - قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومعادلته $9x^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي $2\sqrt{2}$ وحدة وبؤرتاه تطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $9x^2 + 16y^2 = 576$ جد $h, k \in R$ و $2a = 6\sqrt{2}$ و للناقص $c =$ للزائد c

سؤال جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تطبقان على بؤرتي القطع الناقص $3x^2 + 5y^2 = 120$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي والبعـد بين بؤرتيه $1/2$. $2a / 2c = 1/2$

سؤال جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد $12 = 3y^2 - x^2$ والنسبة بين طولي محوريه $5/3$ ومركزه نقطة الأصل. $2a / 2b = 5/3$ للناقص



★ ربط القطع الزائد بالدائرة

• معادلة الدائرة: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

• المركز $(h, k) = (-A/2, -B/2)$ — نصف القطر $r = \sqrt{(h^2 + k^2 - C)}$

سؤال جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه هي نقطة مركز الدائرة $x^2 + y^2 - 16y + 15 = 0$ ونصف طول محوره المرافق يساوي نصف قطر تلك الدائرة. $(1/2)(2b) = r$

★ القطع الزائد القائم

في القطع الزائد القائم يكون $a^2 = b^2$ ومنه اختلافه المركزي $e = \sqrt{2}$.

انسحاب القطع الزائد

البؤرتان على محور السينات

المركز (h, k)

$$(x-h)^2/a^2 - (y-k)^2/b^2 = 1$$

البؤر $F(h+c, k), (h-c, k)$

الرؤوس $V(h+a, k), (h-a, k)$

الأقطاب $M(h, k+b), (h, k-b)$

المحور الحقيقي $2a$ المحور التخيلي $2b$

البؤرتان على محور الصادات

المركز (h, k)

$$(y-k)^2/a^2 - (x-h)^2/b^2 = 1$$

البؤر $F(h, k+c), (h, k-c)$

الرؤوس $V(h, k+a), (h, k-a)$

الأقطاب $M(h+b, k), (h-b, k)$

المحور الحقيقي $2a$ المحور التخيلي $2b$

سؤال معادلة انسحاب جاهزة ومرتبّة: جد إحداثيات المركز والرأسين وطول المحورين والاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $(x+2)^2/9 - (y-1)^2/4 = 1$

المركز — سيني $C(-2, 1) \Rightarrow h = -2, k = 1$

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3, b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

$c^2 = 9 + 4 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$

$V(1, 1), (-5, 1), 2a = 6, 2b = 4, e = \sqrt{13}/3$

سؤال معادلة انسحاب تحتاج ترتيباً: عتین المركز وبؤرتي ورأسي القطع الزائد ثم جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي $2(y+1)^2 - 4(x-1)^2 = 8$

8 نقسم على $(y+1)^2/4 - (x-1)^2/2 = 1$

$C(1, -1), a = 2, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{6}$

$V(1, 1), (1, -3), e = \sqrt{6}/2$



★ إذا أعطى معادلة غير مرتبة فيجب ترتيبها بالوضع القياسي

1. نفتح قوسين بينهما إشارة موجب: $(y \text{ جماعة}) + (x \text{ جماعة}) = \text{العدد}$.
2. نسب معامل x^2 ومعامل y^2 عاملاً مشتركاً (مع الإشارة السالبة).
3. نضيف x^2 نصف معامل للقوس الأول، و y^2 نصف معامل للقوس الثاني.
4. نحذف كل قوس بالمربع الكامل $(\text{الأول} \mp \sqrt{\text{الثالث}})$.
5. نقسم على العدد الذي في الطرف الأيمن ونقارن مع المعادلة القياسية.

سؤال حدد البؤرتين والرأسين والمركز وطول المحورين للقطع الزائد الذي معادلته $16x^2 + 160x - 9y^2 + 18y = 185$.

$$16(x^2 + 10x) - 9(y^2 - 2y) = 185$$

$$16(x+5)^2 - 9(y-1)^2 = 185 + 400 - 9 = 576$$

$$576 \text{ نقسم على } 1 \Rightarrow (x+5)^2/36 - (y-1)^2/64 = 1$$

$$C(-5, 1), a = 6, b = 8, c = 10$$

$$F(5, 1), (-15, 1), V(1, 1), (-11, 1)$$

★ نقطة تنتمي للقطع

- النقطة التي تنتمي للقطع نعوضها في معادلته.
- إذا ظهرت قيمتان (موجبة وسالبة) نأخذ السالبة.

سؤال - إذا كانت النقطة $P(3, 1)$ تنتمي إلى القطع الزائد $1 - y^2/8 = x^2/1$ الذي مركزه نقطة الأصل، حدد طول نصف القطر البؤري المرسوم في الجهة اليسرى من تلك النقطة. PF_2

سؤال - النقطة $P(h, 2\sqrt{2})$ تنتمي للقطع الزائد الذي معادلته $3y^2 = 2h - x^2$ الذي مركزه نقطة الأصل، حدد قيمة h ثم حدد طول نصف القطر البؤري الأول والثاني المرسومين من النقطة P .



سؤال - إذا كانت F_1 هي بؤرة القطع المرفق $x^2 + 24y = 0$ و F_2 هي بؤرة القطع المرفق $y^2 = 32x$ فجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه F_2 طول محوره المرفق يساوي طول القطعة المستقيمة F_1F_2 .

$$x^2 = -24y \Rightarrow 4p = 24 \Rightarrow p = 6 \Rightarrow F_1(0, -6)$$

$$y^2 = 32x \Rightarrow 4p = 32 \Rightarrow p = 8 \Rightarrow F_2(8, 0)$$

$$c = 8 \Rightarrow c^2 = 64 \text{ بؤرة الزائد}$$

$$F_1F_2 = \sqrt{((8-0)^2 + (0+6)^2)} = \sqrt{100} = 10$$

$$2b = 10 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow b^2 = 25$$

$$a^2 = c^2 - b^2 = 64 - 25 = 39 \text{ بالجوهرية}$$

$$x^2/39 - y^2/25 = 1$$

أسئلة مختارة

قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وقطع زائد مركزه نقطة الأصل، كل منهما يمتد ببؤرة الآخر، فإذا كانت $9x^2 + 25y^2 = 225$ معادلة القطع الناقص فجد: مساحة منطقتيه، ومحيطه، ومعادلة القطع الزائد.

جد معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل وبؤراته على محور الإحداثيات وطول محوره المرفق $2\sqrt{2}$ واختلافه المركزي 3 مع الرسم.

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤراته هما بؤرتا القطع الناقص $25x^2 + 9y^2 = 225$ ويمتد دليل القطع المرفق $x^2 + 8y = 0$.

للزائد $c =$ للناقص c ، ويمتد الدليل a

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ورأساه تنتمي لمحور الإحداثيات ويمتد بالنقطتين $(1, \sqrt{20})$ و $(-3, 6)$.

قطع زائد مركزه نقطة الأصل معادلته $hx^2 - 9y^2 = h$ وطول محوره التخياري h وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المرفق المات بالنقطتين $(1, 4)$ ، $(1, -4)$ جد قيمة h .

هسييت إن نفسياتك تعبانة ... فجبلك وردة

عشان تتغير نفسياتك