



القطع المكافئ



الصور القياسية وطرائق إيجاد المعادلة

((القطع المكافئ))



الصور القياسية — الرأس نقطة الأصل $V(0,0)$

نوع القطع	المعادلة	الدليل	البؤرة
قطع مكافئ موجب	$y^2 = 4Px$	$x = -P$	$F(P, 0)$
قطع مكافئ سالب	$y^2 = -4Px$	$x = P$	$F(-P, 0)$
قطع مكافئ موجب	$x^2 = 4Py$	$y = -P$	$F(0, P)$
قطع مكافئ سالب	$x^2 = -4Py$	$y = P$	$F(0, -P)$

★ ملاحظات مهمة

قيمة P دائماً موجبة.

الاختلاف المركزي للقطع المكافئ يساوي واحداً $e = 1$.

المسافة بين البؤرة والدليل تساوي $2P$.

إشارة البؤرة عكس إشارة الدليل.

إذا أعطيت معادلة الدليل نرتبها حتى تصبح: عدد $x = \pm$ أو عدد $y = \pm$.

كيف نجد معادلة القطع المكافئ؟

الحالة (أ) — القطع المكافئ يمر بنقطة

نعوض إحداثيات النقطة (x, y) في معادلة القطع لإيجاد P .

نوع القطع (مكافئ أو مكافئ) نعرفه من المحاور الذي تقع عليه البؤرة، وإذا لم نحدد نأخذ الاحتمالين.

للبؤرة (موجب أو سالب) نعرفها من إشارة إحداثيات النقطة واتجاه فتحة القطع.

سؤال جد معادلة القطع المكافئ الذي مركزه نقطة الأصل والمار بالنقطة $(4, 2)$ وبؤرته على محور السينات.

قطع مكافئ موجب $x^2 = 4Py$

$$(4)^2 = 4P(2) \Rightarrow 16 = 8P \Rightarrow P = 2$$

$$x^2 = 4(2)y \Rightarrow x^2 = 8y$$



الحالة (٢) — القطع المافى يمتد بنقطتين

• إذا مر القطع بنقطتين مثل (x, y) و $(-x, y)$ فإن الإحداثي الثابت هو الذي يحدد نوع القطع.
فكّتب الصورة القياسية حسب إشارة الإحداثي الثابت، ثم نعوض إحدى النقطتين لإيجاد P .

سؤال — قطع مافى يمتد بالنقطتين $(3, 6)$ و $(-3, 6)$ جد معادلته.

قطع صادي موجب $X^2 = 4PY$

$$(3)^2 = 4P(6) \Rightarrow 9 = 24P \Rightarrow P = 3/8$$

$$X^2 = 4(3/8)Y \Rightarrow 2X^2 = 3Y$$

الحالة (٣) — الدليل يمتد بنقطة

• إذا كان دليل القطع يمتد بالنقطة $(\mp x, \mp y)$ فإن:

البؤرة على محور الصادات
عدد $P = + \Rightarrow y = \mp$

البؤرة على محور السينات
عدد $P = + \Rightarrow x = \mp$

• وإذا لم يحدد المحور نأخذ الاحتمالين.

سؤال جد معادلة القطع المافى الذي مركزه نقطة الأصل ودليله يمتد بالنقطة $(6, -5)$ وبؤرته على محور السينات.

الدليل $x = 6$

$x = P$ قطع سيني سالب $y^2 = -4PX$

$$P = 6 \Rightarrow y^2 = -4(6)X \Rightarrow y^2 = -24X$$

سؤال اجد معادلة القطع المافى الذي مركزه نقطة الأصل ودليله يمتد بالنقطة $(-5, 2)$ (المحور غير محدد → احتمالان)

$$x = -5 \Rightarrow P = 5 \Rightarrow y^2 = 20X$$

$$y = 2 \Rightarrow P = 2 \Rightarrow X^2 = -8Y$$

الحالة (٤) — اتجاه الدليل

• الدليل دائماً عمودي على محور القطع، فنأخذه عكس المحور:

الدليل يوازي محور الصادات $\Rightarrow$ عدد x

الدليل يوازي محور السينات $\Rightarrow$ عدد y



التعريف

• لدينا ثلاث نقاط: البؤرة F ، ونقطة على القطع $M(x, y)$ ، ونقطة على الدليل Q .
• حسب نوع القطع ودليله: $F(\mp P, 0)$ أو $F(0, \mp P)$ ، و $(y, \text{الدليل})$ أو $(x, \text{الدليل})$.
• يتم تطبيق تعريف القطع المكافئ: **بُعد النقطة عن البؤرة = بُعدها عن الدليل**.

$$MF = MQ$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

إيجاد المجاهيل

★ **الحالة الأولى: معادلة فيها مجهول والقطع ممّرت بنقطة**
نعتزّض إحداثيّ النقطة في المعادلة مباشرةً ونستخرج المجهول.

★ **الحالة الثانية: معادلة فيها مجهول والدليل ممّرت بنقطة**

أولاً نستخرج معادلة الدليل من النقطة ونجرب قيمة P : عدد $x = \mp$ أو عدد $y = \mp \Rightarrow P = +$ عدد.
نرتّب المعادلة التي فيها المجهول ونستقيمها ①.
نكتب الصورة القياسية بعد تعويض P ونستقيمها ②.
• نقارن ① مع ② فنستخرج المجهول.

سؤال ٢ قطع مكافئ معادلته $y^2 = 4hx$ ودليله ممّرت بالنقطة $(-6, 3)$ جد قيمة h .

الدليل $x = -6$

$$y^2 = 4hx \quad \text{①} \quad \text{نضرب الطرفين في 4}$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow x = -P \Rightarrow \boxed{P = 6} \quad \text{②}$$

$$4h = 4P \Rightarrow h = P \Rightarrow \boxed{h = 6}$$



الانسحاب

بعد الانسحاب — المركز (h, k)

المعادلة	البؤرة	الذليل
$(y-k)^2 = 4P(x-h)$	$F(h+P, k)$	$x = -P + h$
$(y-k)^2 = -4P(x-h)$	$F(h-P, k)$	$x = P + h$
$(x-h)^2 = 4P(y-k)$	$F(h, k+P)$	$y = -P + k$
$(x-h)^2 = -4P(y-k)$	$F(h, k-P)$	$y = P + k$

إذا ظهر في المعادلة قوس مربع مع x أو مع y فهذه معادلة انسحاب.
نستخرج h و k و P بمقارنتها مع الصورة القياسية.

إكمال المربع

كل x^2 و y^2 بجانبه x ، وكل y^2 بجانبه y $\Rightarrow$ لازم نحولها إلى معادلة انسحاب.
نجعل المتغير التربيعي ومرافقه في الطرف الأيسر وبقية الحدود في الطرف الأيمن.
نضيف للطرفين مربع نصف معامل x أو نصف معامل y .
نجعل الطرف الأيسر مربعاً كاملاً على صورة $(\text{المتغير} \pm \text{العدد})^2$.

سؤال ٦ ناقش القطع المكافئ $y^2 + 4y + 2x = -6$

$$y^2 + 4y = -2x - 6$$

$$\text{مربع نصف المعامل } 4 = (4 \text{ نصف})^2$$

$$y^2 + 4y + 4 = -2x - 6 + 4$$

$$(y+2)^2 = -2x - 2 \Rightarrow (y+2)^2 = -2(x+1)$$

القوة ليست في غياب الخوف ...

بل في السير رغم وجوده